

# Ejercicios Unidad 2

Probabilidad I 2026-1

Entrega: sábado 21 de octubre

1. Sea  $X \sim \text{Geo}(p)$ , una variable geométrica que cuenta número de ensayos hasta el primer éxito. Demuestre que para  $k \in \{1, 2, \dots\}$ 
$$\mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k.$$
2. Encuentre la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria que cuenta el número de fracasos hasta el  $r$ -ésimo éxito en ensayos Bernoulli independientes con probabilidad de éxito  $p$ .
3. Sea  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ , demuestre que la función de masa  $f_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$  para  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  cumple las propiedades de una función de masa
4. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución  $\text{Ber}(p)$ .
  - a) Encuentre  $\mathbb{E}[X]$  y  $\text{Var}(X)$  directamente desde la definición.
  - b) Interprete ambos resultados en términos del experimento de lanzar una moneda con probabilidad  $p$  de obtener águila.
5. Sea  $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ .
  - a) Demuestre que  $\mathbb{E}[Y] = np$  y  $\text{Var}(Y) = np(1 - p)$ .
  - b) Use la propiedad de momentos factoriales para rederivar la varianza.
6. Una máquina defectuosa produce una pieza fallada con probabilidad  $p = 0.1$  en cada intento, independientemente de los anteriores. Sea  $X$  el número de piezas hasta obtener la primera fallada.
  - a) Escriba la función de masa de probabilidad de  $X$ .
  - b) Calcule  $\mathbb{E}[X]$  y  $\text{Var}(X)$ .
7. En un juego, se lanza una moneda con probabilidad  $p = 0.4$  de salir cara. Sea  $Y$  el número de lanzamientos necesarios para obtener 3 caras. Determine:
  - a) La función de masa de probabilidad de  $Y$  (explique qué significa cada factor en tal función).
  - b) La probabilidad de que el juego termine exactamente en el quinto lanzamiento.
8. Un centro de llamadas recibe en promedio  $\lambda = 4$  llamadas por hora. Suponga que el número de llamadas por hora sigue una distribución de Poisson.
  - a) Calcule la probabilidad de que lleguen exactamente 6 llamadas en una hora.
  - b) Calcule la probabilidad de que lleguen al menos 3 llamadas.

9. En una fábrica hay un lote de 20 piezas, de las cuales 5 son defectuosas. Si se seleccionan 4 piezas sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente 2 defectuosas? (Indique la distribución utilizada y su justificación).

10. Sea  $X$  una variable aleatoria continua con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} kx(2-x), & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- a) Determine el valor de  $k$ .
- b) Calcule  $\mathbb{P}(0.5 < X < 1.5)$ .
- c) Encuentre la función de distribución

11. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de distribución dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.2, & 0 \leq x < 1, \\ 0.5, & 1 \leq x < 2, \\ 0.8, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

- a) Determine los valores posibles que puede tomar  $X$  y las probabilidades asociadas a cada uno.
- b) Calcule las siguientes probabilidades:

$$P(X = 2), \quad P(1 < X \leq 3), \quad P(X < 1.5).$$

- c) Verifique que la suma de las probabilidades individuales es igual a 1.

12. Sea  $Y$  una variable aleatoria cuya función de distribución es:

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 0.2, & 0 \leq y < 1, \\ 0.2 + 0.4(y-1), & 1 \leq y < 2, \\ 0.6, & 2 \leq y < 3, \\ 0.6 + 0.4 \left( \frac{(y-3)^2}{4} \right), & 3 \leq y < 5, \\ 1, & y \geq 5. \end{cases}$$

- a) Determine el soporte de la variable aleatoria
- b) Verifique que se trata de una función de distribución
- c) Identifique los puntos donde  $Y$  tiene masa puntual y calcule las probabilidades asociadas.
- d) Calcule:

$$P(Y < 2), \quad P(2 \leq Y \leq 3), \quad P(Y > 4).$$

13. Sea  $X$  una variable aleatoria continua con densidad  $f(x) = 2x$ ,  $0 < x < 1$ . Calcule  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\mathbb{E}[X^2]$  y  $\text{Var}(X)$ .

14. Sea  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Demuestre que  $X$  cumple la propiedad de pérdida de memoria, es decir:

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t), \quad s, t > 0.$$

Interprete esta propiedad asumiendo que  $X$  modela el tiempo de vida de una persona.

15. Sea  $X \sim \text{Unif}(a, b)$ .

a) Determine  $\mathbb{E}[X]$  y  $\text{Var}(X)$ .

16. Sea  $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$  con función de densidad

$$f(y) = \frac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Calcule  $\mathbb{E}[Y^3]$ .

17. Sea  $X \sim N(\mu = 50, \sigma^2 = 25)$ . Calcule las siguientes probabilidades:

a)  $P(45 \leq X \leq 55)$ ,

b)  $P(X > 60)$ ,

c)  $P(X < 40)$ .

Grafique la curva de densidad normal sombreando las áreas correspondientes.

18. Una variable aleatoria  $Y$  tiene distribución  $\text{Beta}(\alpha = 2, \beta = 3)$ .

a) Grafique la función de densidad en el intervalo  $(0, 1)$ .

b) Calcule su media y varianza.

19. En una planta automotriz, el número de defectos por pieza sigue una distribución de Poisson con media  $\lambda = 1.2$ . Se inspeccionan 10 piezas.

a) Calcule la probabilidad de que haya exactamente 3 defectos en total.

b) Use la distribución normal como aproximación y compare los resultados.